a

Liczba

*Liczba* to podstawowe pojęcie matematyki. Jest tak podstawowe… że matematycy nie wiedzą, czym jest liczba. Wyróżniają jednak różne rodzaje liczb, które mają już swoje definicje. Na dobry początek poznamy *liczby naturalne*.

Ciężko wytłumaczyć pojęcie liczby inaczej niż przez podanie synonimu[[1]](#footnote-1) – ilość, wartość.

Czym jest liczba

Intuicje

Wyobraźmy sobie pasterza, który sprowadza owce do zagrody. Na początku zagroda z owcami jest pusta. Mówimy wtedy, że w zagrodzie jest *zero* owiec. Do pustej zagrody wchodzi owca. Wtedy liczba owiec w zagrodzie wynosi *jeden*. Następnie do owcy dołącza kolejna. W zagrodzie są *dwie* owce. Utrzymując pozytywną tendencję, stwierdzimy, że następnie liczba owiec w zagrodzie wynosi *dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedem, osiem, dziewięć*. Gdy patrzymy na trzodę, możemy określić jej liczebność, czyli właśnie podać liczbę owiec. Obrazowo wygląda to tak:

tu oczywiście stylowe owce, a nie kule

zero

O jeden

OO dwa

OOO trzy

OOOO cztery

OOOOO pięć

OOOOOO sześć

OOOOOOO siedem

OOOOOOOO osiem

OOOOOOOOO dziewięć

W każdej linijce widzimy po lewej stronie stylową trzódkę, a po prawej słowne określenie liczby owiec w trzodzie. Dla wygody zapisu matematycy używają formy krótszej niż słowna – stosują *cyfry*. Z ich użyciem opis owiec wygląda tak:

W całej lekcji do każdej liczby zapisanej cyframi będzie komentarz z zapisem słownym

0

O 1

OO 2

OOO 3

OOOO 4

OOOOO 5

OOOOOO 6

OOOOOOO 7

OOOOOOOO 8

OOOOOOOOO 9

Oczywiście entuzjazm pasterza nie ograniczy się do dziewięciu owiec. Pasterz może mieć ich sporo więcej:

Najedź na liczbę, aby zobaczyć jej zapis słowny

OOOOOOOOOO 10

OOOOOOOOOOO 11

OOOOOOOOOOOO 12

OOOOOOOOOOOOO 13

OOOOOOOOOOOOOO 14

OOOOOOOOOOOOOOO 15

OOOOOOOOOOOOOOOO 16

OOOOOOOOOOOOOOOOO 17

OOOOOOOOOOOOOOOOOO 18

OOOOOOOOOOOOOOOOOOO 19

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 20

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 21

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 22

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 23

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 24

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 25

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 26

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 27

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 28

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO 29

W tej chwili entuzjazm pasterza przekracza rozmiar naszego podręcznika. Mimo tego owiec wciąż może być więcej:

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,

40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,

50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59,

60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69,

70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79,

80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89,

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99

Pojęcie liczby najprościej uzmysłowić sobie poprzez ilość owiec w trzódce. Jednak liczba jako taka jest tworem znacznie bardziej ogólnym i abstrakcyjnym niż owca. Liczba może dotyczyć jakiegokolwiek obiektu materialnego[[2]](#footnote-2). Możemy określić liczbę kupionych samochodów, liczbę zjedzonych paluszków albo liczbę obalonych flaszek[[3]](#footnote-3). W matematyce jednak liczba występuje samodzielnie, jako twór istniejący sam dla siebie i bez odniesienia do owiec ani flaszek. Najprościej przyjąć, że po prostu jest coś takiego jak liczba jeden, liczba dwa, liczba trzy itd.[[4]](#footnote-4), choć nic nie stoi na przeszkodzie, żeby dopowiedzieć sobie „jedna owca”, „dwie owce”, „trzy owce” itd.

Liczby, które do tej pory poznaliśmy, czyli 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … nazywamy właśnie liczbami naturalnymi.

Definicja formalna

[wymagana znajomość tematu: Zbiory liczbowe]

Liczba naturalna – każdy element zbioru liczb naturalnych

Ile jest liczb?

Intuicje

Cóż… ile chcesz. Gdy wydaje się już, że jakaś liczba jest olbrzymia, zawsze możemy znaleźć kolejną liczbę, która będzie jeszcze większa. Gdy w rachubie

1, 2, 3, 4, …

napotkamy już liczbę 9 i zechcemy pójść dalej, dopisujemy przed cyfrą 9 cyfrę 1, zaś samą cyfrę 9 zamieniamy na 0. Otrzymujemy 10. Liczymy dalej:

11, 12, 13, 14, …, 19

Aby znaleźć kolejną liczbę, cyfrę 1 zamieniamy na następną, a dziewiątkę znowu zamieniamy na 0:

20, 21, 22, 23, 24, …, 29, 30, 31, 32, 33, 34, …, 40,…, 50, …, 60, …, 70, …, 80, …, 90, ..., 95, 96, 97, 98, 99

I co teraz? To samo, dopisujemy 1 z przodu, a obydwie cyfry 9 zamieniamy na 0. Kolejną po 99 jest więc liczba 100. Liczymy dalej:

101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116,117, 118, 119, 120, … 130, …, 140, …, 150, …, 160, …, 170, …, 180, …, 190, …, 200

Przyspieszmy to trochę:

300, …, 400, …,500, …, 600, …, 700, …, 800, …, 900, …

Nietrudno odgadnąć, co nastąpi po liczbie 999. Będzie to 1000. Gdy przebrniemy już przez 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, doliczymy do 10000. Możemy kontynuować takie postępowanie tak długo, jak potrzeba. W ten sposób odkryjemy tak dużo liczb, jak chcemy. I nigdy nie dotrzemy do ostatniej. Możemy powiedzieć, że liczb jest *nieskończenie* wiele.

Trochę o nazewnictwie

Intuicje

Jeśli do zapisu liczby używamy jednej cyfry, to jest to *liczba jednocyfrowa*. Liczby jednocyfrowe to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Podobnie, jeśli zapis liczby wymaga użycia dwóch cyfr, to jest to *liczba dwucyfrowa*. Liczby dwucyfrowe to m.in.[[5]](#footnote-5) 10,11, 12, 13, 20, 35, 67, 89, 91, 99. W ten sam sposób określamy *liczbę trzycyfrową, liczbę czterocyfrową* itd.

Zawsze cyfra stojąca najbardziej z prawej nazywana jest *cyfrą jedności*.

* W liczbie 26 cyfrą jedności jest 6.
* W liczbie 769 cyfrą jedności jest 9.
* W liczbie 100477 cyfrą jedności jest 7.

Cyfra stojąca po lewej od cyfry jedności to *cyfra dziesiątek*.

* W liczbie 97 cyfrą dziesiątek jest 9.
* W liczbie 4782 cyfrą dziesiątek jest 8.
* Liczba 7 nie posiada cyfry dziesiątek.

Cyfra stojąca po lewej od cyfry dziesiątek to *cyfra setek*. Cyfra stojąca po lewej od cyfry setek to *cyfra tysięcy*. Matematykom przeszła chęć na kontynuowanie nazewnictwa, gdy przyszła im na myśl „cyfra dziesiątek tysięcy”.

Nie należy mylić pojęcia liczby z pojęciem cyfry. Liczba ma matematyczną wartość i to na liczbach niedługo będziemy wykonywali operacje[[6]](#footnote-6). Cyfra jest niczym więcej niż graficznym sposobem na zapisanie liczby. Można powiedzieć, że cyfry są tym dla liczb, czym litery dla słów.

Porównywanie liczb

Intuicje

Pasterz miał 7 owiec. W ciemnej dolinie odnalazł zbłąkaną owieczkę, więc poprowadził ją właściwą ścieżką[[7]](#footnote-7). Teraz ma już 8 owieczek. Trudno się nie zgodzić, że teraz pasterz ma *więcej* owieczek niż do tej pory, czyli mówiąc inaczej, przedtem miał *mniej* niż ma teraz. W ten sam sposób, jeśli pasterz Eustachy ma 18 owieczek, a pasterz Euzebiusz ma 67 owieczek, to Eustachy jest zazdrosny.

Spostrzeżenia, których dokonaliśmy, to matematycznie rzecz biorąc porównanie liczb. Ponieważ matematyka bardzo często interesuje, czy jedna liczba jest większa od drugiej, wprowadzono specjalne znaczki na określenie mniejszości lub większości. Stwierdzenie „Liczba 7 jest mniejsza niż 8” zapiszemy jako

7 < 8

Zaś stwierdzenie „67 to więcej niż 18” zapisujemy jako

67 > 18

Te dziubaski to *operatory porównania*. Łatwo zapamiętać, w którą stronę należy obrócić dziubaska:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 67 |  | 18 |

Gdy dostajemy dwie liczby, zawsze jesteśmy w stanie je porównać, czyli stwierdzić, czy jedna z nich jest większa, czy mniejsza od drugiej. Czasami jednak może się zdarzyć, że ktoś spyta nas o porównanie liczb, które są takie same. Jeśli pasterz Eustachy ma 18 owieczek, a pasterz Wirgiliusz też ma 18 owieczek, to Eustachy i Wirgiliusz żyją w zgodzie. Zapisujemy to za pomocą *znaku równości*:

18 = 18

Znaczek = jest symbolem matematycznym, który czytamy jako „równa się” albo „jest równe”. Mówi on tyle, że po jego lewej stronie jest to samo, co po prawej stronie.

Rozszerzenie

Te przepisy trzeba zweryfikować.

Czasami porównanie liczb pozwala na wprowadzenie pewnego kryterium. Gdy w ruchu drogowym uzbierasz więcej niż 24 punkty karne, tracisz prawo jazdy.

* Pan Zygfryd ma 30 punktów karnych, więc przekroczył dozwolony limit (30 > 24).
* Pan Janusz ma 10 punktów karnych, więc chwilowo jest bezpieczny (10 < 24).
* Stefan ma 24 punkty karne. Żyje na krawędzi (24 = 24).

W tym przypadku kryterium można sformułować tak: Tracisz prawo jazdy, jeśli

liczba punktów karnych > 24

Zobaczmy inny przykład. Aby zostać przyjętym do koła naukowego Kujon & Kujon, należy uzyskać z egzaminu wstępnego przynajmniej ocenę 4.

* Michaś dostał z egzaminu 2. Członkowie koła wzgardzili jego osobą (2 < 4).
* Onufry dostał z egzaminu 6. Zostaje przyjęty z otwartymi ramionami (6 > 4).
* Maciuś dostał z egzaminu 4. Wchodzi do koła, chociaż wszyscy krzywo na niego patrzą (4 = 4)

Jak tutaj można sformułować kryterium? Możemy rozpatrzyć dwa przypadki: Zostajesz przyjęty do koła, jeśli

ocena z egzaminu > 4

lub

ocena z egzaminu = 4

Ponieważ zapis ten jest trochę przydługi, wprowadzono symbol uogólniający te dwa fakty:

ocena z egzaminu 4

Operator czytamy „większe lub równe” albo krócej „większe równe”. Podobne znaczenie ma operator („mniejsze równe”). Więcej przygód z tymi wszystkimi dziubaskami czeka w temacie „Nierówności”.

Liczby giganty

Rozszerzenie

Liczb naturalnych naprawdę jest nieskończenie wiele, więc matematycy/poloniści nie podołali wyzwaniu wymyślenia nazw dla nich wszystkich. Postarali się jednak na tyle, aby nazwać wszystkie liczby, z jakimi w praktyce kiedykolwiek będziesz mieć do czynienia. Kolejne nazwy wyglądają z grubsza tak:

1 jeden

10 dziesięć

100 sto

1 000 tysiąc

10 000 dziesięć tysięcy

100 000 sto tysięcy

1 000 000 milion

10 000 000 dziesięć milionów

100 000 000 sto milionów

1 000 000 000 miliard

10 000 000 000 dziesięć miliardów

100 000 000 000 sto miliardów

1 000 000 000 000 bilion

Żeby odczytanie tych liczb było łatwiejsze, przeważnie stosuje się odstęp pomiędzy kolejnymi partiami trzech zer. Liczbę 136 747 980 490 006 można zapisać oczywiście bez odstępów jako 136747980490006. Sam oceń, który zapis jest przystępniejszy. Czasem zamiast odstępów stosuje się też kropki: 136.747.980.490.006. Nie polecamy jednak tej metody[[8]](#footnote-8).

Istotną zmianę w nazewnictwie obserwujemy dopiero „co trzy cyfry”. „Milion” wałkowany jest w formie dziesięciu milionów oraz stu milionów. W ten sam sposób miliard, bilion i wszystkie następne wystąpią z dopiskiem dziesięć oraz sto. Skupmy się na tym, co najciekawsze:

1 000 000 000 000 000 biliard

1 000 000 000 000 000 000 trylion

1 000 000 000 000 000 000 000 tryliard

1 000 000 000 000 000 000 000 000 kwadrylion

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kwadryliard

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kwintylion

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kwintyliard

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 sekstylion[[9]](#footnote-9)

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 sekstyliard

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 septylion

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 septyliard

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 oktylion

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 oktyliard

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 nonylion (lub nonilion)

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 nonyliard (lub noniliard)

W nazewnictwie możemy dostrzec pewną tendencję – na przemian występują przyrostki

-lion oraz –liard. Z kolei podstawy tych wyrazów: mi-, bi-, try-, kwadry- , kwinty-, seksty-, septy-, okty-, nony- pochodzą od liczebników łacińskich.

Ponieważ zapis powyższych liczb powoli staje się uciążliwy, możemy dać Ci ruszyć wyobraźnią i powiedzieć, że:

milion to jedynka i 6 zer

miliard to jedynka i 9 zer

bilion to jedynka i 12 zer,

…,

noniliard to jedynka i 57 zer

*decylion* to jedynka i 60 zer

*decyliard* to jedynka i 63 zera

*undecylion* to jedynka i 66 zer

*undecyliard* to jedynka i 69 zer

*duodecylion* to jedynka i 72 zera

*duodecyliard* to jedynka i 75 zer

trzeba poszukać w źródłach czy po drodze nie ma nic więcej

*googol* to jedynka i 100 zer

*trycylion* to jedynka i 180 zer

*trycyliard* to jedynka i 183 zera

*kwadragilion* to jedynka i 240 zer

*kwadragiliard* to jedynka i 243 zera

*oktogilion* to jedynka i 480 zer

*oktogiliard* to jedynka i 483 zera

*centylion* to jedynka i 600 zer

*centyliard* to jedynka i 603 zera

*googolplex* to jedynka i googol zer

przykłady poniżej trzeba by zweryfikować / wymyślić inne

Prawdopodobnie nie uzmysławiasz sobie, jak wielkie są te liczby[[10]](#footnote-10). Liczba wszystkich ludzi na świecie wynosi trochę ponad 7 000 000 000[[11]](#footnote-11). Liczba gwiazd w naszej galaktyce to około

100 000 000 000. Szacuje się, że w całym Wszechświecie jest 40 000 000 000 000 000 000 000 planet. Liczbę atomów całym Wszechświecie zapisujemy jako jedynkę i 80 zer[[12]](#footnote-12). Nie da się zapisać wszystkich cyfr liczby googolplex.[[13]](#footnote-13)

1. No dobrze, przepraszam za to słowo. Niech będzie „wyraz bliskoznaczny”. [↑](#footnote-ref-1)
2. W sensie… takiego który można dotknąć. [↑](#footnote-ref-2)
3. +18 [↑](#footnote-ref-3)
4. „i tak dalej” – naprawdę nie wiesz co znaczy ten skrót? [↑](#footnote-ref-4)
5. „między innymi” – nigdy wcześniej tego nie widziałeś? [↑](#footnote-ref-5)
6. Jeśli odezwał się w tobie skryty chirurg, to rozminąłeś się z powołaniem. [↑](#footnote-ref-6)
7. Przez wzgląd na swoje imię. [↑](#footnote-ref-7)
8. Jak dotrzesz do tematu „Ułamki dziesiętne”, to zrozumiesz. [↑](#footnote-ref-8)
9. Wiem, o czym myślisz, perwersie [↑](#footnote-ref-9)
10. Spokojnie, my też nie. [↑](#footnote-ref-10)
11. Jeśli czytasz ten podręcznik w przyszłości, wspomnij stare dobre czasy. [↑](#footnote-ref-11)
12. Jeśli nie wiesz, czym jest atom, przyjmij, że jedynka i 80 zer to BARDZO dużo. [↑](#footnote-ref-12)
13. Skompiluj fakty. [↑](#footnote-ref-13)